

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XI Сем.

№ 127.

№ 7.

Содержаніе: О коэффициентахъ трехчлена $px^2 + qx + r$, И. Травчетова (Окончаніе).—Краткій очеркъ исторіи задачи о квадратурѣ круга въ связи съ общимъ вопросомъ о томъ, какія задачи рѣшаются циркулемъ и линейкой, В. К. (Окончаніе).—Научная хроника, В. Г.—Задачи №№ 258—262.—Рѣшенія задачъ №№ 66, 86, 93 и 95 (2 сер.)

О КОЭФФИЦИЕНТАХЪ

ТРЕХЧЛЕНА $px^2 + qx + r$.

(Окончаніе.)

Въ 1887 году академикъ А. А. Марковъ предложилъ мнѣ рѣшить элементарно задачу профессора Д. И. Менделѣева относительно трехчлена $px^2 + qx + r$ и редактировалъ ее такъ, какъ она ниже изложена. Онъ же при этомъ добавилъ, что задача Д. И. Менделѣева соприкасается съ общимъ вопросомъ высокоуважаемаго учителя нашего, академика П. Л. Чебышева, о функціяхъ, весьма мало отклоняющихся отъ нуля, когда данъ первый коэффициентъ полинома n -й степени. Разсмотрѣнные мною вопросы въ № 123 В. О. Ф. дали возможность рѣшить задачу Д. И. Менделѣева и затѣмъ задачу академика Чебышева относительно только трехчлена $px^2 + qx + r$ средствами элементарной алгебры. Изъ всѣхъ задачъ, мною рѣшенныхъ, наивысшій интересъ по мысли представляетъ задача академика Чебышева, которая изложена ниже, и безъ рѣшенія ея моя работа казалась бы незаконченною.

Задача Менделѣева.

Если въ трехчленѣ $px^2 + qx + r$ мѣнять значеніе x отъ a до b , то требуется опредѣлить высшіе точные численные предѣлы для p , q и r такъ, чтобы значенія трехчлена не превышали $\pm D$.

Рѣшеніе:

Изъ условія задачи видно, что p , q и r должны удовлетворять двумъ условіямъ: во 1-хъ) p , q и r должны быть таковы, чтобы значенія трехчлена не превышали $\pm D$ и во 2-хъ) хотя одно изъ чиселъ p , q и r должно имѣть наибольшее численное значеніе. На основаніи рѣшенія 6-й зад. (См. № 123 В. О. Ф.) трехчлены $p_1x^2 + q_1x + r_1$ и $p_2x^2 + q_2x + r_2$ удовлетворяютъ первому условію, если въ коэффициентахъ

$$p_1 = \frac{(\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2},$$

$$q_1 = -\frac{2(\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C})(b\sqrt{A-C} + a\sqrt{B-C})}{(a-b)^2}$$

$$\text{и } r_1 = \frac{(b\sqrt{A-C} + a\sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2} + C$$

значенія A , B и C не превышаютъ $\pm D$, а въ коэффициентахъ

$$p_2 = -\frac{(\sqrt{A-C} - \sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2},$$

$$q_2 = -\frac{2(\sqrt{A-C} - \sqrt{B-C})(b\sqrt{A-C} - a\sqrt{B-C})}{(a-b)^2}$$

$$\text{и } r_2 = \frac{(b\sqrt{A-C} - a\sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2} + C$$

только значенія A и B не превышаютъ $\pm D$.

Прежде чѣмъ найти коэффициенты p , q и r , удовлетворяющіе второму условію, покажу, что коэффициенты p_1 , q_1 и r_1 вообще болѣе коэффициентовъ p_2 , q_2 и r_2 , если значенія трехчленовъ при данныхъ предѣлахъ a и b одинаковы.

Возьмемъ отношеніе

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C})^2}{(\sqrt{A-C} - \sqrt{B-C})^2}$$

1) Если здѣсь A , B и C въ числитель равны A , B и C въ знаменатель, то $\frac{p_1}{p_2} > 1$, потому что числитель есть сумма, а знаменатель есть разность тѣхъ же количествъ. 2) Хотя по

условію задачи въ числитель C не превышаетъ $\pm D$, а въ знаменателѣ C можетъ стремиться къ $-\infty$. но все таки $\frac{p_1}{p_2} > 1$ и въ этомъ случаѣ, потому что, какъ сейчасъ покажу, p_2 стремится къ нулю, когда C стремится къ $-\infty$.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{(\sqrt{A-C} - \sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2} = \\ &= \frac{(\sqrt{A-C} - \sqrt{B-C})^2 (\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2 (\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C})^2} = \\ &= \frac{(A-B)^2}{(a-b)^2 (\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C})^2}. \end{aligned}$$

Здѣсь послѣдняя формула, очевидно, обращается въ нуль при $C = -\infty$. Итакъ вообще $p_1 > p_2$. Теперь чтобы удовлетворить второму условію, нужно найти наибольшее численное значеніе p_1 .

Изъ общей формулы $p_1 = \frac{(\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C})^2}{(a-b)^2}$ вид-

но, что наибольшая величина p_1 не зависитъ отъ знаменателя, куда входятъ только данные предѣлы a и b , но зависитъ отъ числителя, который представляетъ сумму переменныхъ слагаемыхъ A , B и C . Наибольшая же численная величина суммы получится тогда, когда каждое слагаемое достигнетъ наибольшаго численнаго своего значенія съ такимъ знакомъ, чтобы всѣ слагаемыя были одного между собой знака. Въ силу этого соображенія здѣсь нужно положить $A = B = +D$ и $C = -D$, тогда получится наи-

большее численное значеніе $p_1 = \frac{8D}{(a-b)^2}$, при этомъ другіе коэффициенты будутъ $q_1 = -\frac{8(a+b)D}{(a-b)^2}$ и

$$r_1 = \frac{D(a+b)^2 + 4abD}{(a-b)^2}.$$

Вотъ тотъ трехчленъ, въ которомъ p_1 и вообще p достигаетъ наибольшаго численнаго значенія при всякихъ a и b , потому что числитель p_1 не зависитъ отъ a и b .

Не желая увеличивать статью, я ограничиваюсь розысканіемъ наибольшаго численнаго значенія только p ; но считаю нужнымъ привести полный отвѣтъ на задачу Менделѣева въ слѣдующей формѣ:

1) Когда a и b одного между собой знака, то всѣ три коэффициента p , q и r достигаютъ своего наибольшаго численнаго значенія въ одномъ трехчленѣ (параболѣ), опредѣляемомъ коэффициентами:

$$\text{Наибольшее численное значеніе } p = \frac{8D}{(a-b)^2}.$$

$$\text{наибольшее численное значеніе } q = - \frac{8D(a+b)}{(a-b)^2} \text{ и}$$

$$\text{наибольшее численное значеніе } r = \frac{D(a+b)^2 + 4abD}{(a-b)^2}.$$

2) Когда a и b разныхъ знаковъ и численно $a > 3b$ или $b > 3a$, то только p и q достигаютъ наибольшаго численнаго значенія въ одномъ трехчленѣ, опредѣляемомъ коэффициентами:

$$\text{Наибольшее численное значеніе } p = \frac{8D}{(a-b)^2},$$

$$\text{наибольшее численное значеніе } q = - \frac{8(a+b)D}{(a-b)^2} \text{ и}$$

$$r = \frac{D(a+b)^2 + 4abD}{(a-b)^2}.$$

При этомъ наибольшее численное значеніе r получается въ другомъ трехчленѣ съ коэффициентами $p = 0$, $q = 0$ и наиб. числ. знач. $r = -D$.

3) Когда a и b разныхъ знаковъ и численно $b < a < 3b$ или $a < b < 3a$, то всѣ три коэффициента достигаютъ наибольшаго численнаго значенія въ трехъ разныхъ трехчленахъ:

а) Трехчленъ съ наиб. числ. зн. p опредѣляется коэффиц.

$$\text{наиб. чис. зн. } p = \frac{8D}{(a-b)^2}, \quad q = - \frac{8D(a+b)}{(a-b)^2} \text{ и}$$

$$r = \frac{D(a+b)^2 + 4abD}{(a-b)^2}.$$

б) Трехчленъ съ наиб. числ. знач. q опредѣляется коэффиц.

$$p = \frac{D}{2a^2}, \quad \text{наиб. числ. зн. } q = - \frac{D}{a}, \quad r = - \frac{D}{2}, \quad \text{это при}$$

$a < b < 3a$; или $p = \frac{D}{2b^2}$, наиб. числ. зн. $q = \frac{D}{b}$ и $r = -\frac{D}{2}$ это при $b < a < 3b$.

γ) Трехчленъ съ наиб. ч. зн. r опредѣляется коэффициентами $p = 0$, $q = 0$ и наиб. числ. зн. $r = -D$.

4) Когда a и b разныхъ знаковъ и численно равны между собою, то p и r достигаютъ своего наиб. значенія въ одномъ трехчленѣ, опредѣляемомъ коэффициентами: наибольшее численное зн.

$p = \frac{2D}{a^2}$, $q = 0$ и наиб. ч. зн. $r = -D$; а наиб. знач. q полу-

чаетъ въ трехчленѣ съ коэффициентами $p = \frac{D}{2a^2}$, наиб. числен.

зн. $q = \frac{D}{a}$ и $r = -\frac{D}{2}$.

Замѣчаніе. Въ отвѣтахъ D имѣетъ уже только абсолютное значеніе, но предѣлы a и b сохраняютъ за собой знаки.

Частный случай вопроса академика Н. Л. Чебышева.

Если въ трехчленѣ $px^2 + qx + r$ данъ коэффициентъ p , то требуется опредѣлить другіе два коэффициента q и r такъ, чтобы наибольшее численное значеніе трехчлена было наименьшимъ для всѣхъ значеній x , лежащихъ между предѣлами a и b .

Рѣшеніе:

Положимъ, что D есть наибольшее значеніе трехчлена $px^2 + qx + r$, т. е. при переходѣ x отъ a до b значеніе трехчлена не превышаетъ $\pm D$. Тогда на основаніи рѣшенія задачи 6-й (См. № 123 В. О. Ф.) коэффициентъ p выразится такъ:

$$p = \frac{(\sqrt{A - C} + \sqrt{B - C})^2}{(a - b)^2},$$

гдѣ A , B и C не должны превышать $\pm D$. Ясно, что въ этой формулѣ A , B и C можно выразить черезъ D съ нѣкоторымъ переменнымъ коэффициентомъ Z . Такъ что вообще

$$p = ZD$$

Но на основаніи рѣшенія задачи Менделѣева

$$\text{наиб. числен. знач. } p = \frac{8D}{(a - b)^2}.$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ заключаемъ, что

$$\text{наибольшее числ. знач. } Z = \frac{8}{(a - b)^2}.$$

Теперь положимъ, что въ уравненіи

$$p = ZD$$

неизвѣстная величина $p = N$ данному количеству; тогда изъ уравненія

$$ZD = N$$

получаемъ $D = \frac{N}{Z}$. Изъ этого равенства заключаемъ, что наибольшее значеніе D будетъ наименьшимъ, когда Z получитъ выс-

шее численное значеніе $= \frac{8}{(a - b)^2}$; слѣдовательно

$$D = \frac{N}{\frac{8}{(a - b)^2}} = \frac{N(a - b)^2}{8}$$

это есть наименьшее число для наибольшаго значенія D .

Такъ какъ на основаніи рѣшенія задачи Менделѣева наиб. числен. знач. $p = \frac{8D}{(a - b)^2}$ сопровождается другими коэффициентами

$$q = - \frac{8D(a + b)}{(a - b)^2} \quad \text{и} \quad r = \frac{D(a + b)^2 + 4abD}{(a - b)^2},$$

то, подставляя сюда найденное значеніе для D , получимъ слѣдующій трехчленъ, удовлетворяющій условіямъ академика Чебышева:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = N \text{ (данное количество)} \\ q = - N(a + b) \\ r = \frac{N(a + b)^2 + 4abN}{8} \end{array} \right.$$

при всякихъ предѣлахъ a и b .

Преп. мат. 5-й Спб. гимн. И. Травчетовъ.

КРАТКІЙ ОЧЕРКЪ ИСТОРИИ

ЗАДАЧИ О КВАДРАТУРЪ КРУГА

въ связи съ общимъ вопросомъ о томъ, какія задачи рѣшаются циркулемъ и линейкой.

(Окончаніе.)

Мы приведемъ здѣсь только нѣкоторыя практическія указанія, которыя во многихъ случаяхъ могутъ служить для рѣшенія вопроса.

Если задача сводится къ рѣшенію линейныхъ уравненій или къ системѣ двухъ уравненій, изъ которыхъ одно первой, другое второй степени, то уравненія рѣшаются въ квадратныхъ корняхъ и графическое воспроизведеніе этого рѣшенія не можетъ представлять затрудненія. Болѣе сложныя задачи приводятся къ уравненіямъ 3-й степени или къ системѣ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными второй степени. Но легко показать, что и въ послѣднемъ случаѣ вопросъ о построимости рѣшенія также приводится къ изслѣдованію уравненія 3-й степени.

Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что задача приведена къ двумъ уравненіямъ съ двумя неизвѣстными:

$$\left. \begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F &= 0 \\ A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Намъ удастся выразить корни этихъ уравненій въ радикалахъ второй степени, если мы сведемъ нашу систему къ другой системѣ, въ которой одно изъ уравненій будетъ линейное. Помножимъ для этого второе уравненіе на неопредѣленный множитель h и сложимъ съ первымъ. Выберемъ затѣмъ множитель h такимъ образомъ, чтобы въ полученномъ уравненіи:

$$(A + hA_1)x^2 + 2(B + hB_1)xy + (C + hC_1)y^2 + 2(D + hD_1)x + 2(E + hE_1)y + F + hF_1 = 0 \quad (2)$$

лѣвая часть разлагалась на два множителя, а для этого должно удовлетворяться уравненіе:

$$\{(B + hB_1)(D + hD_1) - (A + hA_1)(E + hE_1)\}^2 - [(B + hB_1)^2 - (A + hA_1)(C + hC_1)][(D + hD_1)^2 - (A + hA_1)(F + hF_1)] = 0 \quad (3)$$

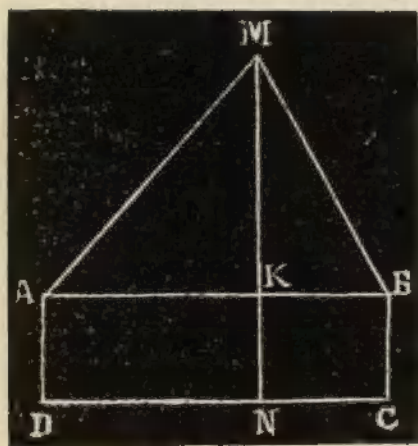
(См. „Разложение многочленовъ на множителей.“ „Журналъ Эл. Мат.“ II. 1.).

Лѣвая часть уравненія (3) носитъ названія дискриминанта уравненій (2). Если совершимъ указанныя дѣйствія, то уравненіе (3) послѣ надлежащихъ сокращеній представится въ видѣ:

$$Kh^3 + Lh^2 + Mh + N = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ коэффиціенты K , L , M и N выражаются въ зависимости отъ коэффиціентовъ данныхъ уравненій. Но мы уже замѣтили выше, что уравненія высшихъ степеней, къ которымъ приводится рѣшеніе геометрическихъ задачъ, должны разлагаться на множителей, степень которыхъ имѣетъ видъ 2^n . Это замѣчаніе должно быть справедливо и для уравненія (4), ибо корни его не должны содержать радикаловъ 3-й степени. При такихъ условіяхъ лѣвая часть уравненія (4) должна разлагаться на два множителя, изъ которыхъ одинъ первой, другой второй степени. Такое разложеніе производится обыкновенно довольно просто, послѣ чего одинъ изъ корней дискриминанта будетъ найденъ; и если подставимъ его въ ур. (2), то лѣвая часть послѣдняго разложится на два множителя первой степени. Приравнивая каждый изъ нихъ нулю, мы получимъ два уравненія первой степени. Рѣшая каждое изъ нихъ съ однимъ изъ данныхъ уравненій, мы получимъ четыре системы рѣшеній, строяемыхъ циркулемъ и линейкой, если они выражаются дѣйствительными величинами.

Пояснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ: Квадратъ, построенный на діагонали даннаго прямоугольника $ABCD$ въ 3 раза больше площади прямоугольника. Найти точку M , равноотстоящую отъ вершины A и стороны CD такимъ образомъ, чтобы разстояніе $MB = AB$.



Фиг. 17.

Пусть MN (фиг. 17) — перпендикуляръ, опущенный изъ точки M на основаніе CD . Согласно условію задачи имѣемъ:

$$MB = AB \text{ и } MA = MN,$$

откуда

$$MB^2 = AB^2 \text{ и } MA^2 = MN^2 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Если примемъ во вниманіе, что

$$AM^2 = AK^2 + MK^2$$

$$MB^2 = MK^2 + KB^2,$$

то мы представимъ равенства (А) въ видѣ

$$\left. \begin{aligned} MK^2 + KB^2 &= AB^2 \\ AK^2 + MK^2 &= MN^2 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (B)$$

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

Пусть $AB = a$, $BC = b$, $AK = x$, $MK = y$, тогда $BK = a - x$, $MN = y + b$. Если подставимъ эти выраженія въ равенства В, то получимъ, послѣ надлежащихъ сокращеній, слѣдующія уравненія:

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 2by - b^2 &= 0 \\ x^2 - 2ax + y^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (C)$$

Замѣтимъ при этомъ, что согласно условію задачи имѣетъ мѣсто соотношеніе $a^2 + b^2 = 3ab$.

Для этой системы условное ур. (4) выразится слѣдующимъ образомъ:

$$b^2h^3 + 2b^2h^2 + b^2h + a^2 = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (5)$$

Но легко убѣдиться тождественнымъ преобразованіемъ, что

$$\begin{aligned} &b(b^2h^3 + 2b^2h^2 + b^2h + a^2) = \\ &= (bh + a)\{b^2h^2 + b(2b - a)h + (b - a)^2\} + a(a^2 + b^2 - 3ab) \end{aligned}$$

и такъ какъ $a^2 + b^2 - 3ab = 0$, то уравненіе (5) имѣетъ корень $-\frac{a}{b}$. Дѣйствительно, если подставимъ это значеніе въ

уравненіе $x^2(1 + h) - 2bhy - 2ax + y^2 - hb^2 = 0$, то лѣвая часть его разложится на два множителя:

$$\{y + a + k(x + \sqrt{ab})\} \{y + a - k(x + \sqrt{ab})\} = 0,$$

гдѣ $k = \sqrt{\frac{a-b}{b}}$, и система (В) замѣнится двумя системами:

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 2by - b^2 &= 0 \\ y + a + k(x + \sqrt{ab}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x^2 - 2by - b^2 &= 0 \\ y + a - k(x + \sqrt{ab}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Задача очевидно разрѣшима и дальнѣйшее рѣшеніе ея не представляетъ затрудненія.

Но если намъ не удастся разложить дискриминанта на множителей, то задача можетъ и не рѣшаться циркулемъ и линейкой. Однако, чтобы въ этомъ убѣдиться, мы должны доказать, что корни ур. (4) не могутъ быть выражены безъ радикаловъ

третьей степени. Распорядимся для этого входящими въ условіе переменными величинами такимъ образомъ, чтобы коэффициенты L и M ур. (4) обратились въ 0. Тогда $h = -\sqrt[3]{\frac{N}{K}}$. Если

$\frac{N}{K}$ не представляетъ полного куба, то задача въ этомъ частномъ случаѣ неразрѣшима, а слѣдовательно она подавно не рѣшается въ общемъ видѣ. При такихъ условіяхъ изслѣдованіе дискриминанта даетъ однако возможность опредѣлить рядъ частныхъ случаевъ, въ которыхъ задача можетъ быть рѣшена. Въ самомъ дѣлѣ, если распорядимся переменными величинами такимъ образомъ, чтобы $K = 0$, то корни ур. (4) будутъ выражаться въ радикалахъ 2-й степени. Точно также задача будетъ разрѣшима, если данныя въ ней величины удовлетворяютъ соотношенію $N=0$, такъ какъ при этомъ дискриминантъ имѣетъ корень равный 0 и одно изъ уравненій непосредственно разлагается на линейные множители. Вообще, задача рѣшается во всѣхъ тѣхъ частныхъ случаяхъ, при которыхъ входящія въ заданіе величины удовлетворяютъ соотношенію

$$Km^3 + Lm^2 + Mm + N = 0,$$

гдѣ m произвольное построенное выраженіе.

Поясимъ все сказанное на примѣрѣ.

Положимъ, что намъ дана слѣдующая задача:

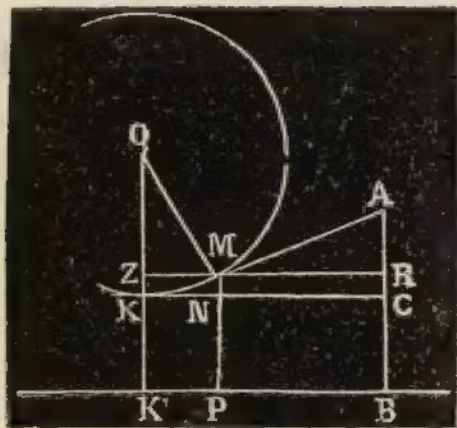
На данной окружности найти точку, равноотстоящую отъ данной прямой и данной точки *). Пусть A данная и M искомая точка (фиг. 18). Опустимъ изъ нихъ перпендикуляры AB и MP на данную прямую и черезъ середину C отрезка AB и черезъ точку M проведемъ прямыя $MR \parallel CN \parallel BP$. Изъ прямоугольнаго треугольника MAR имѣемъ:

$$MA^2 = AR^2 + RM^2,$$

и такъ какъ по условію задачи $AM=MP$, то

$$AR^2 + RM^2 = MP^2 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

*) Инымъ словами требуется розыскать точки пересѣченія параболы съ произвольной окружностью.



Фиг. 18.

Опустимъ теперь изъ центра O перпендикуляръ OK на прямую CN и продолжимъ линію RM до пересѣченія съ OK въ точкѣ Z . Тогда изъ прямоугольнаго треугольника MOL получаемъ:

$$MO^2 = OZ^2 + MZ^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Обозначимъ теперь AB черезъ p , OK черезъ a и CK черезъ b ; за неизвѣстныя примемъ $CN = x$ и $MN = y$. Тогда $AR = \frac{p}{2} - y$, а $MP = \frac{p}{2} + y$. Далѣе $MZ = PK = b - x$, $OZ = a - y$.

Если всѣ эти величины подставимъ въ равенства (A) и (B), то получимъ систему уравненій:

$$\left(\frac{p}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{p}{2} - y\right)^2 + x^2$$

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = r^2$$

гдѣ r —радіусъ даннаго круга. По совершеніи надлежащихъ перемѣнокъ эта система представится въ видѣ:

$$x^2 - 2py = 0; \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + k = 0,$$

гдѣ $a^2 + b^2 - r^2 = k$. Если помножимъ ур. 1-е на неопредѣленный множитель h и сложимъ со вторымъ, мы получимъ уравненіе, дискриминантъ котораго имѣетъ видъ:

$$p^2h^3 + p(p - 2b)h^2 + (b - 2pb - k)h + b^2 + a - k = 0.$$

Распорядимся теперь величинами p и k такимъ образомъ, чтобы $p - 2b = 0$ и $b^2 - 2pb - k = 0$. Тогда дѣйствительный корень

дискриминанта равенъ $\sqrt[3]{\frac{r^2}{a^2 - r^2}}$. Задача очевидно неразрѣшима,

если подкоренная величина не представляетъ собой полнаго куба.

Въ частныхъ случаяхъ задача рѣшается, когда $p = 0$, т. е. когда данная точка лежитъ на данной прямой; или если $a^2 + b^2 - k = 0$,

но въ этомъ случаѣ $r = 0$, окружность обращается въ точку и задача теряетъ смыслъ *). Если, наконецъ, положимъ въ дис-

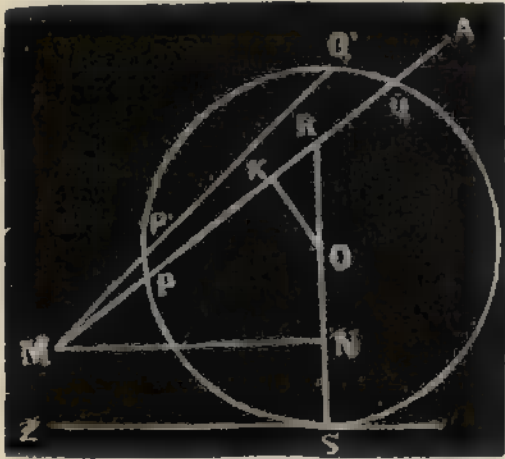
криминантѣ $h = -1$ и полученное выраженіе приравняемъ нулю, то найдемъ, что задача рѣшается также при $a = 0$, т. е. когда центръ данной окружности лежитъ на перпендикулярѣ, опущен-

*) Задача въ этомъ случаѣ сводится къ тому, чтобы опредѣлить условія, при которыхъ данная точка лежитъ на данной параболѣ.

номъ изъ данной точки на данную прямую. Такихъ частныхъ случаевъ можно найти безконечное множество.

Изслѣдуемъ еще слѣдующую задачу:

Провести окружность, касающуюся данной прямой и отсекающую отъ двухъ другихъ прямыхъ хорды данной величины. (Фиг. 19.)



Фиг. 19.

Пусть O центръ искомой окружности. Проведемъ радіусъ OS въ точку касанія и изъ центра опустимъ перпендикуляръ OK на одну изъ хордъ. Изъ точки пересѣченія M двухъ данныхъ прямыхъ проведемъ MN параллельно третьей прямой и примемъ отрезки MN и ON за неизвѣстныя x и y . Введемъ также слѣдующія обозначенія: данную длину хорды PQ обозначимъ черезъ $2l$, а уголъ AMN черезъ ϑ , разстояніе между параллелями MN и ZS черезъ a . Тогда легко видѣть, что

$$OK = OR \cos \vartheta = (RN - ON) \cos \vartheta = (MN \operatorname{tg} \vartheta - ON) \cos \vartheta = \\ = MN \sin \vartheta - ON \cos \vartheta = x \sin \vartheta - y \cos \vartheta.$$

Съ другой стороны, согласно нашему обозначенію $PO = y + a$.

Подставивъ эти выраженія въ равенство $PK^2 + OK^2 = PO^2$, получимъ уравненіе:

$$l^2 + (x \sin \vartheta - y \cos \vartheta)^2 = (y + a)^2.$$

Такимъ же точно образомъ второй хордѣ P_1Q_1 будетъ соответствовать такое же уравненіе

$$l_1^2 + (x \sin \vartheta_1 - y \cos \vartheta_1)^2 = (y + a)^2.$$

Послѣ надлежащихъ преобразованій эти уравненія примутъ слѣдующій видъ:

$$x^2 - y^2 - 2xy \operatorname{Ctg} \vartheta - 2by + m = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2xy \operatorname{Ctg} \vartheta_1 - 2b_1y + m = 0, \text{ гдѣ}$$

$$m = \frac{l^2 - a^2}{\sin^2 \vartheta}, \quad m_1 = \frac{l_1^2 - a^2}{\sin^2 \vartheta_1}, \quad b = \frac{a}{\sin^2 \vartheta}, \quad b_1 = \frac{a}{\sin^2 \vartheta_1}.$$

Если теперь помножимъ второе уравненіе на множитель h , сложимъ съ первымъ и приравняемъ нулю дискриминантъ полученнаго уравненія, то найдемъ въ результатѣ:

$$b^2 + m \operatorname{Cosc}^2 \vartheta + (2bb_1 + b^2 + 2m \operatorname{Ctg} \vartheta \operatorname{Ctg} \vartheta_1 + 2m + m_1 \operatorname{Cosc}^2 \vartheta_1)h + (b_1^2 + 2bb_1 + 2m_1 \operatorname{Ctg} \vartheta \operatorname{Ctg} \vartheta_1 + m \operatorname{Cosc}^2 \vartheta + 2m)h^2 + (b_1^2 + m \operatorname{Cosc}^2 \vartheta_1)h^3 = 0.$$

Распорядимся теперь величинами m и m_1 такимъ образомъ, чтобы коэффициенты при h и h^2 обратились въ нуль и для большей простоты положимъ $\operatorname{Ctg} \vartheta = \operatorname{Ctg} \vartheta_1 = 1$. Тогда условныя уравненія будутъ имѣть слѣдующій видъ:

$$b^2 + 2bb_1 + 2m + m_1 = 0$$

$$b_1^2 + 2bb_1 + 2m + 2m_1 = 0$$

Отсюда получимъ:

$$m_1 = b^2 - b_1^2; \quad m = -\frac{b^2 + 2bb_1 + m_1}{2} = -\frac{b_1^2 - 2b^2 + 2bb_1}{2},$$

$$\text{откуда } h = \sqrt[3]{-\frac{b_1^2}{2bb_1 - b_1^2 + b^2}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что задача въ общемъ случаѣ неразрѣшима. Впрочемъ, если $b^2 + m \operatorname{Cosc}^2 \vartheta = 0$, или если $b_1^2 + m_1 \operatorname{Cosc}^2 \vartheta = 0$, то задача можетъ быть рѣшена.

Но предложенный нами методъ не всегда ведетъ къ цѣли, ибо не всегда мы можемъ распорядиться данными величинами такимъ образомъ, чтобы коэффициенты L и M дискриминанта обратились въ нуль. Можетъ также случиться, что задача въ томъ частномъ случаѣ, когда эти коэффициенты обращаются въ нуль, разрѣшима, хотя она не можетъ быть рѣшена въ общемъ случаѣ. Здѣсь остается только подыскать такія значенія коэффициентовъ L и M , при которыхъ рѣшеніе уравненія третьей степени не представляло бы затрудненій. Чтобы выяснитъ это на примѣрѣ, обратимся къ задачѣ о трисекціи угла. Задача эта непосредственно приводится къ уравненію 3-й степени слѣдующимъ образомъ:

Пусть $3Q$ данный уголъ. Намъ извѣстно, что

$$\operatorname{Cos} 3Q = 4\operatorname{Cos}^3 Q - 3\operatorname{Cos} Q.$$

Полагая здѣсь $2\operatorname{Cos} Q = x$, мы приведемъ рѣшеніе задачи къ уравненію:

$$x^3 - 3x + a = 0,$$

гдѣ $a = 2\operatorname{Cos} 3Q$. Здѣсь мы не можемъ уничтожить члена, содержащаго неизвѣстное въ первой степени. Но, положивъ въ этомъ

уравненіи $x = u + \frac{1}{u}$, приведемъ его къ биквадратному урав.

$$u^6 + au^3 + 1 = 0; \text{ откуда } u = \sqrt[3]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}}$$

и такимъ образомъ задача неразрѣшима. Задачи, которыя приводятся къ уравненіямъ болѣе высокихъ степеней, обыкновенно очень сложны и требуютъ въ каждомъ частномъ случаѣ спеціальнаго изслѣдованія.

Кромѣ изложеннаго способа распознаванія, разрѣшима ли задача циркулемъ и линейкой, мы приведемъ еще одну теорему, которая даетъ возможность рѣшить этотъ же вопросъ на основаніи чисто геометрическихъ соображеній. Теорема эта заключается въ слѣдующемъ:

IV. Не существуетъ другихъ кривыхъ, кромѣ прямой и окружности, пересѣченіе которыхъ съ произвольной окружностью можетъ быть построено циркулемъ и линейкой.

Поэтому, если задача сводится къ розысканію точекъ пересѣченія окружности съ какимъ нибудь геометрическимъ мѣстомъ, если намъ удастся при этомъ обнаружить, что это геометрическое мѣсто не есть ни прямая, ни окружность, то мы можемъ утверждать, что задача неразрѣшима, если только положеніе данной окружности относительно геометрическаго мѣста вполнѣ произвольно. Такъ, одна изъ предыдущихъ задачъ приводитъ къ розысканію точки пересѣченія окружности съ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, равноотстоящихъ отъ данной точки и данной прямой. Если даже неизвѣстно, что геометрическое мѣсто есть парабола, то всегда легко убѣдиться въ томъ, что это не прямая и не окружность; задача, слѣдовательно, неразрѣшима.

Чтобы подчеркнуть еще разъ то обстоятельство, что эти задачи неразрѣшимы только циркулемъ и линейкой, т. е. прямой и окружностью, тогда какъ съ помощью другихъ кривыхъ онѣ рѣшаются подчасъ очень просто, мы приведемъ рѣшеніе задачи о трисекціи угла, предложенное древнимъ геометромъ Никомахомъ. Для этой цѣли, равно какъ и для построенія двухъ средне пропорціональных имъ предложена кривая, носящая его имя (Конхоида Никомеда). Положимъ, что имѣемъ некоторую точку О и прямую АВ. Черезъ точку О проведемъ произвольную прямую, и отложимъ на ней отъ точки ея пересѣченія съ данной прямой

АВ по обѣ стороны равные отрѣзки МС и МС₁ постоянной длины. Геометрическое мѣсто, описанное точками С и С₁ при вращеніи прямой ОМ вокругъ точки О, носитъ названіе конхоиды. Точку О называютъ полюсомъ, прямую АВ осью и разстояніе МС параметромъ конхоиды. Слѣдующія соображенія даютъ возможность примѣнить эту кривую къ рѣшенію задачи о трисекціи угла. Пусть $\angle ABC = 3Q$ —данный уголъ (фиг. 20) $\angle EBD = Q$, искомая треть даннаго угла, построенная съ другой стороны. Изъ точки В радіусомъ равнымъ ВМ описываемъ окружность и проводимъ сѣкущую MN до пересѣченія съ АВ въ точкѣ D. Легко видѣть, что $\angle MNB + \angle BMN = 2\angle BNM = \angle ABC + \angle EBD = 4Q$, откуда $\angle BNM = 2Q$, а $\angle BDM = \angle BNM - \angle NBD = Q = \angle NBD$: отсюда слѣдуетъ, что $\triangle NBD$ равнобедренный и $BN = ND$. Точка N опредѣляется слѣдовательно, какъ пересѣченіе окружности съ конхоидой, для которой точка М служитъ полюсомъ, прямая AD осью и отрѣзокъ MB параметромъ.



Фиг. 20.

Послѣ этого длиннаго отступленія возвратимся къ оставленному нами вопросу о квадратурѣ круга.

Исслѣдованіе этого вопроса по существу гораздо сложнее, и ни одинъ изъ предложенныхъ выше методовъ сюда неприменимъ, потому что величина π опредѣляется не изъ уравненія, а на основаніи чисто геометрическихъ соображеній. Но Линдемману удалось доказать, что число π не только не удовлетворяетъ уравненію 1-й, 2-й, 4-й и т. д. степени, но не можетъ служить корнемъ никакого, вообще, алгебраическаго уравненія съ раціональными коэффициентами. Само собою разумѣется, что тѣмъ самымъ доказывается невозможность квадрировать кругъ циркулемъ и линейкой.

Мы не имѣемъ возможности привести здѣсь доказательства этого предложенія, а потому ограничимся указаніемъ идеи, на которой основывается это доказательство.

Даже въ элементарныхъ сочиненіяхъ по алгебрѣ доказывалось, обыкновенно, слѣдующія соотношенія:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, а e основаніе Неперовыхъ логарифмовъ. Если

положимъ здѣсь $z = \pi$, то получимъ $e^{\pi i} = -1$, или $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Если мы теперь докажемъ, что $e^{x i} + 1$ не можетъ равняться нулю, если x есть корень алгебраическаго уравненія съ рациональными коэффициентами, то тѣмъ самымъ будетъ доказано, что π не можетъ быть корнемъ такого уравненія.

Послѣдній выводъ будетъ тѣмъ болѣе справедливъ, если мы докажемъ, что произведение

$$P = (e^{x_1 i} + 1)(e^{x_2 i} + 1)(e^{x_3 i} + 1) \dots (e^{x_n i} + 1),$$

гдѣ x_1, x_2, x_3, \dots суть корни какого нибудь уравненія n -ой степени съ рациональными коэффициентами, не можетъ равняться нулю ни при какомъ значеніи n .

При помощи ряда леммъ, основывающихся на формулахъ интегральнаго исчисленія, Линдеманъ показалъ, что при всякомъ какъ угодно маломъ δ и любомъ значеніи n , можемъ найти два цѣлыхъ числа K и L такимъ образомъ, чтобы

$$0 < KP - L < \delta.$$

Отсюда слѣдуетъ, что произведение KP (а слѣдовательно и P) не только не можетъ равняться нулю, но и никакому вообще цѣлому числу, ибо разность двухъ цѣлыхъ чиселъ не можетъ быть бесконечно малой величиной. Это доказательство является послѣднимъ словомъ науки по вопросу, о которомъ мы говорили.

В. К. (Одесса).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Летучее соединеніе желѣза съ окисью углерода (Ber. d. deutsch. Chem. Ges., 1891, 2248), получено Mond'омъ и Quincke, и—одновременно съ ними—Berthelot. Если надъ мелко раздробленнымъ желѣзомъ (получающимся возстановленіемъ щевелево-кислаго желѣза въ струѣ водорода при 400°) пропускать окись углерода, то часть желѣза улетучивается въ видѣ соединенія съ окисью углерода. Это доказывается и потерей въ вѣсѣ взятаго желѣза, и тѣмъ, что если прошедшую надъ желѣзомъ окись углерода пропускать затѣмъ черезъ стекляныя трубки при 200° — 350° , то изъ нея выделяется желѣзо въ видѣ зеркальнаго налета на трубкѣ. 12 grm.

железа потеряли въ струѣ СО въ теченіе 6-и недѣль 2 grm. Удалось установить составъ этого соединенія, воспользовавшись тѣмъ, что тяжелыя минеральныя масла его вполне поглощаютъ и въ такомъ растворѣ можетъ быть произведенъ анализъ. Анализъ показываетъ, что по составу соединеніе железа съ окисью углерода аналогично никкельтетракарбонилу и можетъ быть выражено формулой $\text{Fe}(\text{CO})_4$.

(Naturwiss. Rundsch. 1891, 510).

Періодическія измѣненія высоты солнечныхъ протуберанцевъ, подобныя періодическимъ измѣненіямъ широты солнечныхъ пятенъ, обнаружилъ Риссо въ Палермо (Comptes rend. 1891. 255.). Spörer по своимъ наблюденіямъ установилъ, что въ 11-и лѣтніе періоды среднія геліографическія широты солнечныхъ пятенъ постепенно уменьшаются, пятна приближаются къ экватору солнца; затѣмъ пятна удаляются отъ экватора въ высшія широты, во время слѣдующаго періода снова опускаются къ экватору и т. д.

Наблюденія Риссо надъ протуберанцами обнимаютъ періодъ въ 11 лѣтъ (1880—1890 г.). За это время наблюдались 7663 протуберанца въ 30" и больше высоты. Всѣ наблюденія произведены съ однимъ и тѣмъ же рефракторомъ и спектроскопомъ и поэтому совершенно сравнимы между собой. Выводъ же изъ этихъ наблюденій такой, что если графически выразить среднія широты пятенъ и среднія широты протуберанцевъ, то обѣ пары кривыхъ (одна пара для сѣвернаго полушарія солнца, другая—для южнаго) проходятъ почти параллельно другъ другу на разстояніи 14° одна отъ другой.

(Naturwiss. Rundsch. 1891. 509).

В. Г.

ЗАДАЧИ.

№ 258. Нѣкто получилъ 465 рублей сторублевыми, десятирублевыми и рублевыми бумажками. Всѣхъ бумажекъ было 42. Сколько было каждаго сорта?

НВ. Требуется найти всѣ рѣшенія этой задачи простымъ разсужденіемъ, не прибѣгая къ помощи алгебры.

Г. Клейберъ (Нидца).

№ 259. Къ окружности радіуса r проведена въ M касательная, на которой взяты точки A и B въ разстояніяхъ a и b отъ M .

Вычислить радиусъ окружности, проходящей черезъ точки А и В и касающейся данной окружности.

И. Николаевъ (Пенза).

№ 260. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ Прям. Тригонометріи Верецагина, Спб. 1883, стр. 307, № 1463):

„Изъ двухъ мѣстъ А и В отправляются одновременно два поѣзда, соотвѣтственно по направлениамъ АД и ВЕ, пересѣкающимся въ точкѣ С подѣ угломъ 60° ; оба поѣзда движутся равномерно и проходятъ каждый часъ: первый 20 верстъ, а второй 30 верстъ. Черезъ сколько часовъ со времени ихъ отправленія, расстояние между ними сдѣлается равнымъ первоначальному (АВ), если извѣстно, что расстояние $АС = 50$ верстъ, а расстояние $ВС = 40$ верстъ?“

Г. Ширинкинъ (Воронежъ).

№ 261. Найти точку пересѣченія трехъ плоскостей: плоскости параллельной оси проекцій, плоскости перпендикулярной къ оси проекцій и плоскости, проходящей черезъ ось проекцій и составляющей данный уголъ съ горизонтальною плоскостью проекцій.

М. Добровольскій (Тамбовъ).

№ 262. Рѣшить уравненіе

$$\frac{2x + 2}{6x - 4a} + \frac{3}{x + 3a} = \frac{10x - 3a}{3x^2 + 7ax - 6a^2} + 1.$$

І. Каменскій (Пермь).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 66 (2 сер.). Стороны угла М пересѣчены параллельными прямыми АВ и СD. Требуется провести окружности, одну черезъ точки А и В, другую черезъ точки С и D такъ, чтобы онѣ пересѣклись на сторонахъ угла и чтобы общая ихъ хорда имѣла данную длину a .

Въ произвольной точкѣ N, взятой на сторонѣ MBD, строимъ $\angle MNP = \angle MAB$ и на прямой NP откладываемъ $NF = a$; изъ точки F проводимъ прямую параллельно MB до пересѣченія со стороной даннаго угла въ точкѣ G и изъ G проводимъ GN параллельно NF до пересѣченія съ MB въ точкѣ H; тогда $GN = NF = a$. Окружность, проведенная черезъ А, G и В, пройдетъ и черезъ точку H; дѣйствительно, на-

зываетъ точку пересѣченія прямыхъ HG и AB черезъ K , изъ подобія $\triangle AGK$ и HKV имѣемъ:

$$GK \cdot KH = AK \cdot KV,$$

т. е. AB и GH хорды одной окружности.

Другая окружность, проведенная черезъ G , D и C пройдетъ и черезъ точку H , слѣдовательно проведенныя окружности — искомыя.

Еслибы данная хорда не пересѣкала линій AB и CD , то въ четырехугольникахъ $CDHG$ и $ABHG$ сумма противоположныхъ угловъ была бы равна $2d$, слѣдовательно около нихъ можно было бы описать окружности.

А. П. (Пенза), И. Бискъ (Кіевъ), Г. Теплицкій (Кременчугъ), Л. Лебедевъ, К. Щмолевъ (Курскъ).

№ 86 (2 сер.). Раздѣлить площадь сектора въ крайнемъ и среднемъ отношеніи дугою окружности, концентрической съ дугою сектора.

Пусть радіусъ $OB = R$, $OD = x$; дуга $AB = a$ и дуга $CD = y$; $\frac{a}{y} = \frac{R}{x}$; $y = \frac{ax}{R}$. Площадь сектора $AOB = \frac{aR}{2}$,

$$COD = \frac{x}{2} \cdot y = \frac{ax^2}{2R}; \text{ площадь } ACDB = \frac{aR}{2} - \frac{ax^2}{2R} = \\ = \frac{a}{2R}(R^2 - x^2).$$

Пусть $ACDB$ большая часть площади сектора; поэтому

$$\frac{a^2}{4R^2}(R^2 - x^2)^2 = \frac{a^2x^2}{4}, \text{ или } x^2 + Rx - R^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Слѣдовательно, нужно описать дугу большею частью радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

А. П., Н. Николаевъ (Пенза), И. Андреевъ, Н. Фекличевъ (Москва), Е. Приоровскій, Н. Волковъ (Спб.), М. Прясловъ (Ревель), Г. Ширининъ, В. Чужовъ (Воронежъ), В. Россовская (Курскъ), О. Озаровская (Тифлисъ), Л. Теплицкій, А. Дукельскій (Кременчугъ), Х. Лурье (Кіевъ), В. Тюнинъ (Уфа).

№ 93 (2 сер.). Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ Прям. Триг. Пржевальскаго, изд. 3-е, 1884 г. № 14):

„Съ корабля, находящагося въ A видятъ два маяка B и C на западъ; чрезъ часъ плаванія къ сѣверу оба эти маяка уже

видны: одинъ на юго-западъ, а другой на юго-юго-западъ отъ корабля. Зная разстояніе между маяками ($BC = a$), найти скорость корабля.“

Пусть черезъ часъ корабль находился въ точкѣ A' и пусть $AA' = x$, $A'C = y$, $BA' = z$; тогда $AB = x - a$. Изъ $\triangle CA'A$

$$y = x\sqrt{2}.$$

Въ треугольникѣ $AA'C$ линія $A'B$ есть биссекторъ угла при A' , а потому:

$$a : (x - a) = y : z$$

$$\text{откуда } x = \frac{a\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{2}$$

А. П. (Пенза), В. Россовская (Курскъ), А. Семенчиковъ, В. Апостоловъ (Донск. К. К.), М. Акопянцъ (Тифлисъ), В. Тюнинъ, А. Даниловъ (Уфа), А. Витковский (Великолукъ), Н. Карновъ (Златополь), Е. Пригоровскій (Спб.), А. Рубиновскій (Кіевъ).

№ 95 (2 сер.). Рѣшить уравненія:

$$x^5 = mx + ny$$

$$y^5 = my + nx$$

Складывая и вычитая почленно, находимъ

$$x^5 + y^5 = (m + n)(x + y) \text{ и } x^5 - y^5 = (m - n)(x - y),$$

откуда

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = m + n$$

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = m - n$$

следовательно

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = m, \text{ или } (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = m$$

$$x^3y + xy^3 = -n, \text{ или } xy(x^2 + y^2) = -n$$

Полагая $xy = u$, $x^2 + y^2 = v$, находимъ для опредѣленія u и v два уравненія:

$$u^4 + mu^2 - n^2 = 0$$

$$uv = -n.$$

Н. Свѣшниковъ (Троицкъ), А. П. (Пенза), Н. Вонсикъ, А. Семеновъ, Г. Ширинкинъ (Воронежъ), И. Бисекъ (Кіевъ), М. Акопянцъ (Тифлисъ), Н. Соловьевъ (Москва), Н. Карновъ (Златополь), В. Соколовъ (Кострома), В. Рубцовъ (Уфа), А. Охитовичъ (Спб.).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпагинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 28 Ноября 1891 г.

Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа. Тираспольская, № 14.

Открыта подписка на 1892 годъ

на еженедельный политическій, литературно-художественный и юмористическій журналъ съ каррикатами

„РАЗВЛЕЧЕНІЕ“.

Наши читатели могли достаточно убѣдиться, въ какой мѣрѣ новая редакція прилагаетъ усилія для совершенствованія журнала во всѣхъ отношеніяхъ, что и засвидѣтельствовано многими благодарственными письмами гг. подписчиковъ и читателей. Для участія въ журналѣ привлечены всѣ лучшія силы литературныя и художественныя, работающія въ желательномъ направленіи.

Журналъ даетъ въ годъ пятьдесятъ **№№**, въ которыхъ помѣщается болѣе **восемисотъ** прекрасно исполненныхъ рисунковъ извѣстныхъ каррикатуристовъ-художниковъ, при чемъ въ каждомъ номерѣ многіе изъ каррикатуръ являются въ раскрашенномъ видѣ. Литературный отдѣлъ вмѣщаетъ въ себѣ массу художественныхъ рассказовъ, сценъ, очерковъ, стихотвореній и всякаго рода юмористическихъ мелочей, трактующихъ злобу дня. Въ то же время редакція, проникнутая горячимъ стремленіемъ стоять на стражѣ общественныхъ интересовъ и рисовать полную картину нравовъ современнаго общества, даетъ въ журналѣ мѣсто различнымъ статьямъ и фельетонамъ, обсуждающимъ въ серьезномъ и сатирическомъ тонѣ всѣ общественныя дѣла столицъ и провинціи, а также помѣщаетъ большіе романы, повѣсти и драматическія произведенія правоописательнаго характера.

Ради возможно хорошаго и изящнаго изготовленія литографскихъ работъ по печатанію и раскрашиванію рисунковъ, редакція поручила эти работы лучшей въ Москвѣ литографіи—художника **В. А. Симова**.

Въ виду значительно увеличивающейся подписки, — въ наступающемъ 1892 году издательница нашла возможнымъ дать всѣмъ годовымъ подписчикамъ

Т Р И П Р Е М І И,

изъ которыхъ двѣ главныя—гравюры съ картинъ знаменитыхъ французскихъ художниковъ Котта и Фэрье.

Первая премія: **ОФЕЛІЯ И ГАМЛЕТЪ.**

Вторая премія: **ВЪ БУРЮ.**

Каждая въ размѣрѣ около $1\frac{4}{9}$ вершковъ.

Третья премія составляетъ изъ себя художественно исполненный альбомъ портретовъ знаменитыхъ артистовъ съ ихъ автографами, подъ названіемъ:

НАШИ ТАЛАНТЫ.

Эти портреты будутъ разсылаться, по мѣрѣ ихъ отпечатанія, въ видѣ приложений къ журналу.

Двѣ главныя преміи высылаются немедленно по подпискѣ.

Для ознакомленія публики съ выдающимися достоинствами нашихъ премій, какихъ не выдавало подписчикамъ еще ни одно изданіе, они выставлены въ окнахъ извѣстныхъ книжныхъ, эстампныхъ и писчебумажныхъ магазиновъ столицъ и провинціи.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ (съ доставкою и пересылкою):

На годъ	шесть (6) руб.	На три мѣсяца	одинъ (1) руб. 50 к.
» полгода	три (3) »	» одинъ мѣсяць	» 50 »

За преміи годовые подписчики уплачиваютъ **1 руб.**

Уплата подписныхъ денегъ марками не принимается

Пробный номеръ высылается за три семикопѣчныя марки.

Подписка принимается въ главной конторѣ журнала: Москва, Цвѣтной бульваръ, Знаменскія пер., домъ Соѣдовой, въ конторѣ Н. печковской (Петровскія линіи), а также во всѣхъ книжныхъ магазинахъ столицъ и провинціи.

Издательница **А. Соѣдова**.

Редакторъ **Н. Соѣдовъ**.

БИБЛІОГРАФЪ

1892.

ИЗДАНИЕ ПЕРІОДИЧЕСКОЕ

Годъ VIII.

(12 №№ въ годъ.)

Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія рекомендованъ для основн. библіотекъ всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній мужскихъ и женскихъ.— Ученымъ Комитетомъ при Св. Синодѣ одобренъ для приобрѣтенія въ фундаментальныя библіотеки духовныхъ семинарій и училищъ.—По распоряженію Военно-Учебнаго Комитета помѣщенъ въ основной каталогъ для офицерскихъ библіотекъ.

Отд. 1-й. Историческіе, историко-литературные и библіографическіе матеріалы, статьи и замѣтки; разборы новыхъ книгъ; исторія, теорія и практика книгоустройства; библіотечное, издательское и книжоторговое дѣло прежде и теперь; хроника книгоустройства. Вопросы и отвѣты.

Отд. 2-й (справочный). Лѣтопись книгопечатанія: 1) каталогъ новыхъ книгъ; 2) указатель статей въ періодическихъ изданіяхъ; *Rossica* (указатель иностранныхъ сочиненій о Россіи); 4) правительственныя распоряженія по дѣламъ печати; 5) библіографическія извѣстія и объявленія

Съ основанія „Библіографа“ въ немъ принимали участіе:

В. А. Алексѣевъ, И. О. Анненскій, А. И. Барбашевъ, проф. Н. И. Барсовъ, Я. О. Березинъ-Ширяевъ, проф. К. Н. Бестужевъ-Рюминъ, В. О. Боцяновскій, С. Н. Брайловскій, С. К. Буличъ, П. В. Быковъ, Е. А. Бѣловъ, Н. Н. Вакуловскій, А. Васильевъ, К. П. Галлеръ, Н. В. Губерти, И. В. Дмитровскій, Г. В. Дружининъ, проф. М. А. Дьяконовъ, І. І. Змигродзскій, К. А. Ивановъ, Е. Ц. Кавелина, проф. Н. И. Карѣевъ, Д. О. Кобеко, И. А. Козеко, М. А. Куплетскій, проф. А. С. Лаппо-Данилевскій, Н. Ф. Леонтьевъ, И. А. Линиченко, Н. П. Лихачевъ, Х. М. Лопаревъ, акад. Л. Н. Майковъ, А. И. Маленинъ, В. И. Межовъ, графъ Г. А. Милорадовичъ, А. Е. Молчановъ, И. Я. Морошкинъ, Н. Н. Оглобинъ, проф. С. О. Платоновъ, Н. И. Позняковъ, С. И. Пономаревъ, С. Л. Пташицкій, Э. Л. Радловъ, А. И. Савельевъ, А. А. Савичъ, А. О. Селивановъ, С. М. Середонинъ, проф. А. И. Соболевскій, С. Л. Степановъ, В. Н. Сторожевъ, А. А. Титовъ, И. О. Токмаковъ, П. М. Устимовичъ, Н. Д. Чечулинъ, И. А. Шляпкинъ, проф. Е. Ф. Шмурло, Д. Д. Языковъ.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА:

за годъ съ доставкой и пересылкой въ Россіи 5 р.; за границу 6 р.
отдѣльно нумеръ 50 коп., съ перес. 60 коп.

Плата за объявленія: страница—8 руб.; $\frac{3}{4}$ стр.—6 р. 50 к.; $\frac{1}{2}$ стр. 4 р. 50 коп.; $\frac{1}{4}$ стр.—2 р. 50 к.; $\frac{1}{8}$ стр.—1 р. 50 к.

О новыхъ книгахъ, присылаемыхъ въ редакцію, печатаются бесплатно объявленія или помѣщаются рецензіи.

Подписка и объявленія принимаются въ книжномъ магазинѣ «Новаго времени» А. Суворина (Сиб., Невскій просп., д. № 38) и въ редакціи. Кромѣ того подписка принимается во всѣхъ болѣе извѣстныхъ книжныхъ магазинахъ.—Гг. иногородные подписчики и заказчики объявленій благоволятъ обращаться непосредственно въ редакцію.

Адресъ редакціи: Сиб., Забалканскій (Обуховскій) просп. д. № 7, кв. 13.

Оставшіеся въ ограниченномъ числѣ полные комплекты «Библіографа» за прошлое время съ 1885 г. продаются по 5 р. (съ дост. и перес.) за годовой экземпляръ. Также имѣются въ продажѣ изданныя редакціей брошюры: 1) Сборникъ рецензій и отзывовъ о книгахъ по русской исторіи, №№ 1, 2 и 3. Ц. по 60 коп. 2) Библіографич. указатель книгъ и статей о св. Кириллѣ и Меѳодіи, ц. 40 коп. 3) Александръ Николаевичъ Сѣровъ. I. Библіографическій указатель произведеній Сѣрова. II. Библіографическій указатель литературы о Сѣровѣ и его произведеніяхъ. Вып. I и II. Сост. А. Е. Молчановъ, Ц. по 1 р. за вып. 4) Библіографическій списокъ литературныхъ трудовъ К. Н. Бестужева-Рюмина. Составилъ И. А. Козеко. Ц. 75 коп. — Книгопродавцамъ обычная уступка.

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ“.

„Извѣстія“, издаваемые подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ четырехъ до шести въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20-ти листовъ.

«Извѣстія» раздѣляются на два отдѣла.

1) Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области Физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ Общества.

2) Второй отдѣлъ содержитъ:

а) Лѣтопись Физико-математическаго Общества (протоколы засѣданій, извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годичные отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ библіотеку Общества и т. п.).

б) Библіографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и заграницею сочиненіяхъ по Физико-математическимъ наукамъ. Научныя новости.

в) Задачи и вопросы, предлагаемыя для рѣшенія, и рѣшенія ихъ.

Въ «Извѣстіяхъ» могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библіографическія и другія, имѣющія отношеніе къ Физико-математическимъ наукамъ.

Члены Физико-математическаго Общества пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предыдущій годъ, получаютъ «Извѣстія» бесплатно.

Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „ИЗВѢСТІЯ“ въ годъ 3 руб. (съ доставкою и пересылкою).

Подписка принимается Предсѣдателемъ Физико-математическаго Общества проф. А. В. Васильевымъ и Секретаремъ Общества М. С. Сегелемъ.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА на 1892 годъ

НА ЖУРНАЛЪ

ПЕДАГОГИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ,

издаваемый

при Главномъ Управленіи

военно-учебныхъ заведеній.

Выходитъ ежемѣсячно книжками отъ 5 до 7 и болѣе печатныхъ листовъ и состоитъ изъ двухъ отдѣловъ: официальнаго и неофициальнаго.

Въ неоффиц. части въ теченіе 1891 г. были помѣщены, между прочимъ, слѣдующія статьи:

Опытъ систематическаго изложенія теор. основъ и приѣмовъ преподаванія искусства выразительнаго чтенія *Д. Д. Коровякова*.—Синтактическія новшества. *Т. В. Докучаева*.—Къ вопросу о методахъ и приѣмахъ веденія ученическихъ сочиненій. *С. В. Преображенскаго*.—О вліяніи точныхъ наукъ на образованіе слога. *Е. Ф. Литвиновой*.—Современное преподаваніе математики въ средне-учебныхъ заведеніяхъ Германіи. *З. В. Вулиха*.—Объ изученіи иностранныхъ языковъ. *А. Н. Томсона*.—Новое направленіе въ педагогику. *И. Ф. Кантерева*.—Объ образовательномъ значеніи некоторыхъ учебныхъ предметовъ. *О. А. Фуме*.—Объ электрическихъ машинахъ. *И. Новикова*.—Иллюстраціи къ статьямъ о педагогическихъ наказаніяхъ. *А. Н. Острогорскаго*.—Отдѣлы: критика и библіографія. Изъ записной книжки редакціи. Для библіографическихъ справокъ. Приложенія: Описаніе коллекцій Педаг. Музея. I. Исторія *М. А. Андриянова*.—Теоретическія основанія тѣлесныхъ упражненій. *И. Н. Иванова*.

Условія подписки: Съ доставкою въ Россіи—5 руб., за границу—6 руб. Подписка принимается: 1) въ редакціи (отъ иногороднихъ)—Фурштадская, № 12—4 кв. 9 и 2) въ книжномъ магазинѣ Н. О. Фену, Спб., Невскій пр. № 40.

РЕМЕСЛЕННУЮ ГАЗЕТУ.8-й годъ
изданія.

Еженедельное общепольное издание съ рисунками въ текстѣ и съ приложеніемъ, сверхъ того, при каждомъ номерѣ не менѣе двухъ листовъ исполнительныхъ чертежей и образцовыхъ рисунковъ новыхъ издѣлій, инструментовъ, станковъ, приспособленій и пр. предметовъ по различнымъ ремесламъ, а также кустарнымъ и мелкимъ фабрично-заводскимъ производствамъ съ подробными описаніями и наставленіями, къ нимъ относящимися.

«Ремесленная Газета» необходима спеціальнымъ школамъ, технику, ремесленнику, кустарю, торговцу, сельскому хозяину, любителю ремесла и потребителямъ ремесленныхъ издѣлій, т. е. во всякомъ семействѣ.

Для того, чтобы выбрать или заказать нужный предметъ, полезно и необходимо знать, какимъ современнымъ требованіямъ онъ долженъ удовлетворять. Въ этомъ отношеніи «Ремесленная Газета» оказываетъ необходимое содѣйствіе и потребителю, и производителю ремесленныхъ издѣлій. — Въ ней постоянно помѣщаются рисунки и чертежи самыхъ модныхъ образцовъ по слѣдующимъ ремесламъ: столярному, драпировочному, портновскому (моды Руссея), сапожно-башмачному, кузнечному, слесарному, токарному и пр. При этомъ въ общепонятномъ изложеніи даются надлежащія описанія, указанія и рецепты практическаго свойства.

Кромѣ множества разнообразнѣйшихъ чертежей и рисунковъ, въ «Ремесл. Газетѣ» будетъ помѣщенъ рядъ описаній: различныхъ ремесленныхъ производствъ, новѣйшихъ изобрѣтеній, усовершенствованій, выставокъ, музеевъ, образцовыхъ ремесленныхъ и техническихъ школъ, частныхъ промышленныхъ мастерскихъ и пр.

Кромѣ еженедельныхъ сообщеній о различныхъ заграничныхъ новостяхъ, редакція будетъ давать бесплатно отвѣты и совѣты на запросы гг. подписчиковъ, относящіеся до ихъ специальности.

Получая всѣ извѣстнѣйшія иностранныя изданія по различнымъ ремесламъ, Редакція располагаетъ лучшими изъ помѣщенныхъ въ нихъ статей и рисунковъ и даетъ возможность своимъ подписчикамъ пользоваться массою полезнаго, необходимаго и дорогаго (многимъ недоступнаго) матеріала за крайне дешевую цѣну.

Редакція имѣетъ спеціальныхъ корреспондентовъ за границей въ большихъ промышленныхъ центрахъ, получаетъ отъ нихъ лучшіе образцы новѣйшихъ издѣлій и множество рисунковъ съ описаніями.

Контора изданія оказываетъ гг. иногороднимъ подписчикамъ бесплатно всевозможное содѣйствіе по различнымъ справкамъ, также по выпискѣ книгъ, инструментовъ и др. предметовъ, которые высылаются по первому требованію немедленно съ наложеннымъ платежемъ.

«Ремесленная Газета» въ теченіе истекшихъ 6 лѣтъ успѣла пріобрѣсти огромный составъ читателей, не только въ виду ея характера и крайней дешевизны, но главнымъ образомъ вслѣдствіе того обилія полезнаго и необходимаго для всякаго матеріала, который она даетъ своимъ подписчикамъ, а именно:

50 №№ въ годъ, содержащихъ до 1000 статей со множествомъ рисунковъ (гравюръ) въ текстѣ и болѣе ста листовъ приложеній (замѣняющихъ преміи въ «Рем. Газ.»), которыя отдѣльно стоятъ въ розничной продажѣ выше 20 р. с. — Изящно иллюстрированный календарь.

Сверхъ того прилагаются бесплатно отдѣльныя книги, содержащія описанія разныхъ производствъ.

Редакція въ состояніи давать все это своимъ читателямъ лишь въ виду ихъ многочисленности и широкаго развитія своего дѣла.

Объемъ изданія еще съ 1891 г. увеличенъ въ 1½ раза упомянутыми приложеніями.

Подписная цѣна остается прежняя: 6 р. въ годъ съ перес. и достав. (за полгода 4 р.)

Полные экземпляры «Ремесл. Газеты» со всеми приложеніями за 1886 г. по 10 руб., а за 1887, 1889, 1890 и 1891 г. (безъ книгъ, высылаются по первому требованію съ наложеннымъ платежемъ).

Экземпляры за 1885 и 1888 гг. всѣ разошлись.

«Ремесленная Газета» одобрена Учен. Комит. Мин. Нар. Просвѣщенія: 1) для техническихъ и ремесленныхъ училищъ — мужскихъ и женскихъ; 2) для городскихъ и сельскихъ училищъ; 3) для учительскихъ институтовъ и семинарій, а также 4) для библіотекъ реальныхъ училищъ.

АДРЕСЪ РЕДАКЦІИ: Москва, Малая Дмитровка, домъ № 12.